100 ans

au Lycée d'Altitude de

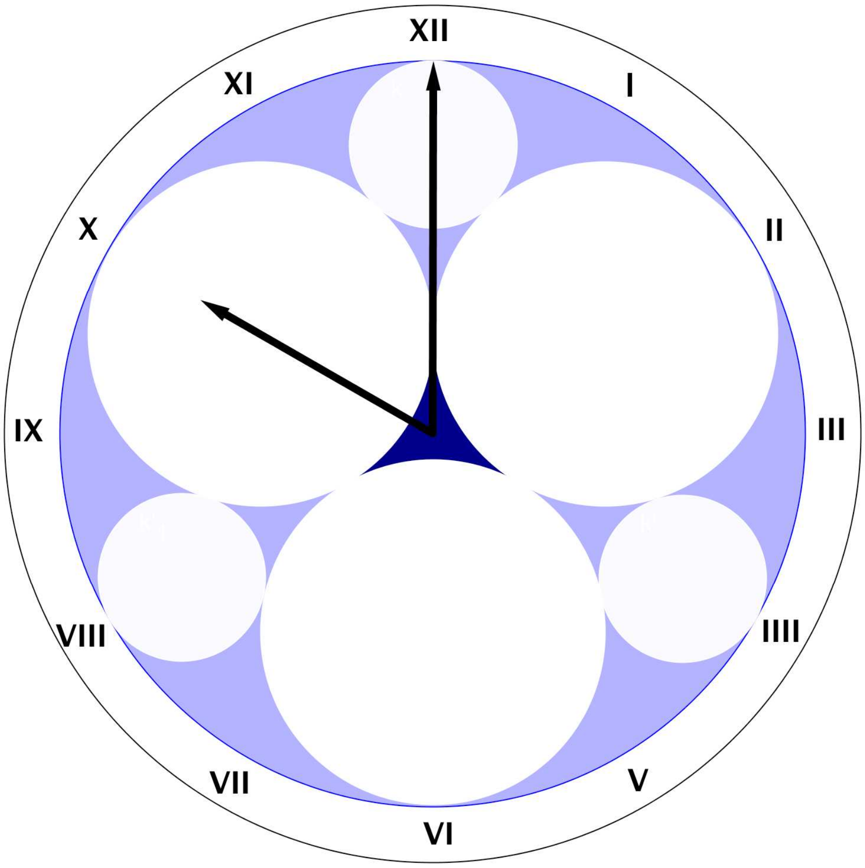
BRIANÇON

Le problème du centenaire

du 18 mai 2011

Les mystères mathématiques de l'horloge du

Lycée de Briançon



Calculatrices et tables de calcul sont autorisées.

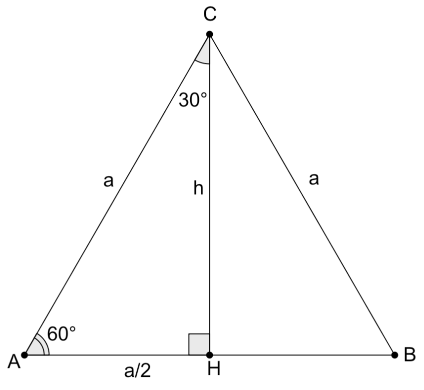
Les réponses seront données sur la feuille annexe *: aucune justification n'est demandée.*

<u>Rappels</u> :

• Les centres de deux cercles tangents sont alignés avec le point de tangence de ces deux cercles.

• Si ABC est un triangle équilatéral de côté a

alors $h = a\dfrac{\sqrt{3}}{2}$



x (en degré)	0	30	45	60	90
sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Toutes les questions sont indépendantes.

1. Le premier octobre 1911, jour de rentrée au nouveau lycée, l'horloge est en route depuis minuit. Le fil du temps commence à se dévider régulièrement. Ce fil magique est attaché à l'extrémité de l'aiguille des heures et s'enroule autour du cercle décrit par la pointe de l'aiguille. Dans la nuit du 30 septembre 1985, à 24 h 00, le fil, trop court, arrête l'horloge.
On sait que la longueur de la petite aiguille est de 36 centimètres et que les années bissextiles de la période considérée sont les multiples de 4.
Quelle était la longueur du fil au mètre près ? On rappelle que $\pi \approx 3{,}1416$.

2. Après maintes recherches, le Grand Maître Denius Vialettus retrouve le fil magique (fil du temps) au fond du grenier du lycée en 2011, ce qui lui permet de refaire fonctionner l'horloge le 1er avril à midi. Mais, horreur, les disciples du Grand Maître se rendent compte que l'horloge fonctionne bien mal. En effet, si la petite aiguille fait un tour complet en 12 heures, la grande aiguille fait le tour du cadran en 52 minutes seulement. Le problème est que le Grand Maître ne peut intervenir pour arrêter l'horloge que lorsque les deux aiguilles sont sur le 12.
Combien de temps devra-t-il attendre ?

3. Tous les jours, entre 16 h et 17 h, Nicolas regarde par la fenêtre de la salle de classe l'horloge en attendant patiemment la fin des cours.
A quelle heure les deux aiguilles vont-elles se superposer (donnez le résultat arrondi à la seconde près).

4. La sonnerie de l'horloge est provoquée par un poids qui descend de 1 cm à chaque coup de cloche dans un puits de 11,8 m de profondeur.
L'horloge sonne le nombre de coups égal à l'heure indiquée : à 7 h, elle sonne 7 coups, à 8 h, elle sonne 8 coups, etc...
On sait que l'horloge sonne seulement entre 7 h du matin et 9 h du soir (inclus). On remonte l'horloge le 1er mai à 6 h du matin.
A quelle date (jour et heure) l'horloge sonnera-t-elle pour la dernière fois, si on ne l'a pas remontée avant ?

5. Le Grand Maître du Temps Denius Vialettus ne manque pas d'idées pour décorer l'horloge. Il dessine pour cela le motif qui est donné en annexe 1 figure 1.
Les trois cercles, de même rayon R, sont tangents deux à deux, et aussi tangents intérieurement au grand cercle T.

Pour simplifier les calculs, on prend comme rayon de T, 1 mètre pour les questions a) et b).

a) Calculez l'expression exacte de R.

On rajoute enfin trois cercles de rayon r tangents au grand cercle T et aux cercles de rayon R (voir figure 2).

b) Calculez l'expression exacte de r.

c) En réalité, le rayon de T vaut 50 cm. Calculez les valeurs approchées en centimètres de R et de r (donner les valeurs approchées au millimètre près).

d) Le but de cette question est de trouver une valeur approchée en cm^2 de l'aire centrale coloriée dans la figure ci-dessus.
Déterminez son expression en fonction de R, puis son expression exacte et enfin sa valeur approchée au centimètre carré près.

ANNEXE 1

FIGURE 1

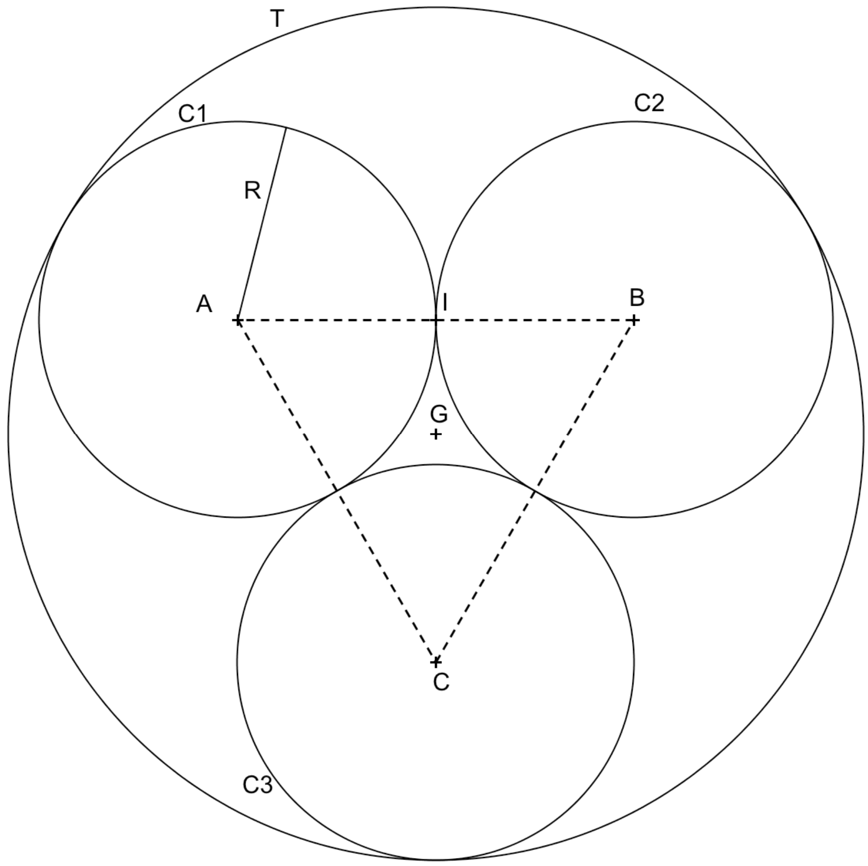
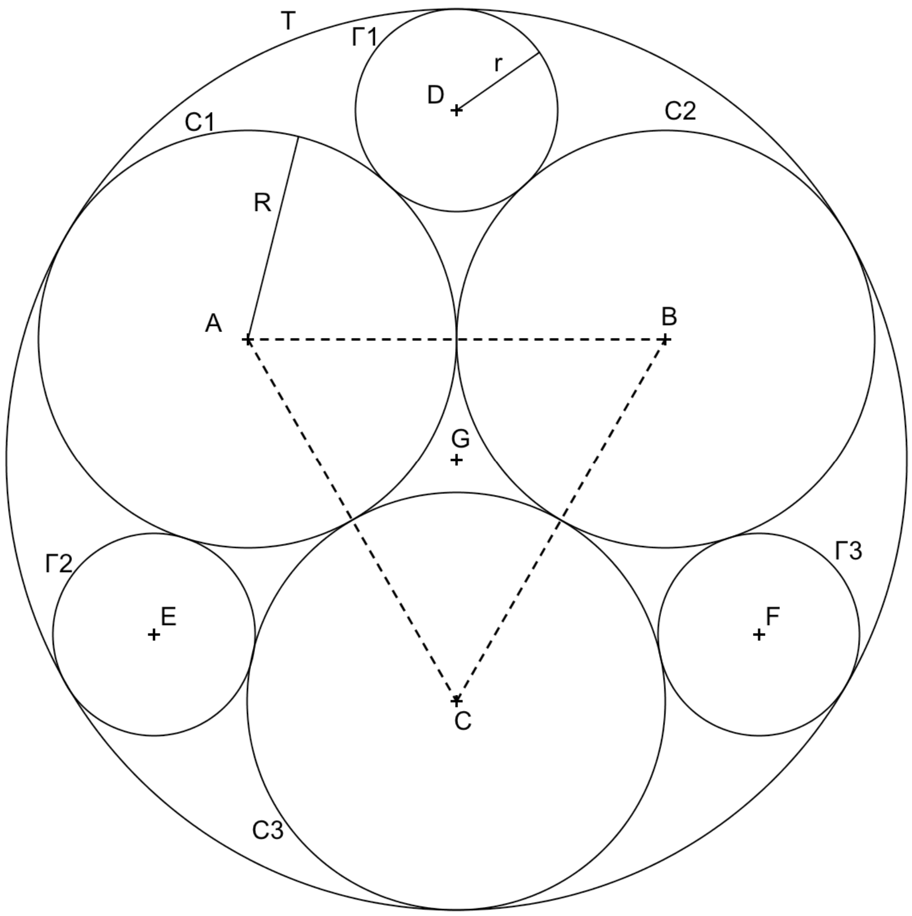


FIGURE 2



ANNEXE 2 : **FEUILLE REPONSE**

NOM :	
Lycéen :	**Sénior :**

1) La longueur du fil était de : km.

2) Le Grand Maître doit attendre : heures.

3) Les aiguilles vont se superposer à environ : h mn s

4) L'horloge sonnera pour la dernière fois le : à : heure(s).

5) **a)** **R** =

b) **r =**

c) **R =** cm

r = cm

d) L'expression exacte de l'aire centrale en fonction de R est:

c'est à dire :

L'aire centrale vaut environ cm^2.